

GHEORGHE-ADALBERT SCHNEIDER

**SĂ ÎNVĂȚĂM MATEMATICA
FĂRĂ PROFESOR**

Clasa a – VII – a

**EDITURA HYPERION
CRAIOVA 2020**

BIBLIOGRAFIE

1. **Gh. A. Schneider**, *Culegere de probleme de aritmetică și algebră pentru clasele V-VIII*, Editura Hyperion, Craiova 2016.

2. **Gh. A. Schneider**, *Culegere de probleme de geometrie pentru clasele V-VIII*, Editura Hyperion, Craiova 2016.

3. **Gh. A. Schneider**, Matematică – exerciții și probleme pentru clasa a VII - a, Editura Hyperion, Craiova 2019.

4. Manuale clasa a VII - a

5. Colecția *Gazeta Matematică*, seria B, 1966-1993.

CUPRINS

	Enunțuri	Rezolvări
1. Multimea numerelor reale	5	178
1.1 Rădăcina pătrată a unui număr rațional	5	178
1.1.1 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural	5	178
1.1.2 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional	7	178
1.1.3 Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr natural; aproximări	9	179
1.1.4 Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional; aproximări	12	180
1.2 Reguli de calcul cu radicali. Scoaterea factorilor de sub radical; introducerea factorilor sub radical	15	180
1.3 Numere iraționale, exemple. Multimea numerelor reale; incluziuni $N \subset Z \subset Q \subset R$	18	181
1.4 Modulul unui număr real. Compararea și ordonarea numerelor reale. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări	21	182
1.5 Operații cu numere reale (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, puteri cu exponent întreg). Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$	24	183
1.5.1 Adunarea numerelor reale	24	183
1.5.2 Scăderea numerelor reale	26	184
1.5.3 Înmulțirea numerelor reale	28	185
1.5.4 Împărțirea numerelor reale	30	185
1.5.5 Puteri cu exponent număr întreg	32	186
1.5.6 Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$	34	187
1.6 Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$, media geometrică a două numere reale positive	36	188
1.7 Ecuația de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$	38	188
1.8 Teste grilă de autoevaluare	39	189
Testul 1	39	189
Testul 2	40	190

Testul 3	41	190
2. Ecuății și sisteme de ecuații liniare	42	191
2.1 Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă; identități	42	191
2.2 Ecuații de forma $ax+b=0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$; mulțimea soluțiilor unei ecuații; ecuații echivalente	44	192
2.3 Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute; rezolvare prin metoda substituției și / sau prin metoda reducerii	49	194
2.4 Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații	55	196
2.5 Teste grilă de autoevaluare	61	198
Testul 1	61	198
Testul 2	62	198
Testul 3	63	199
3. Elemente de organizarea datelor	64	200
3.1 Producția carteziană a două mulțimi nevide. Reprezentarea într-un sistem de axe perpendiculare (ortogonale) a unor perechi de numere reale. Distanța dintre două puncte din plan ..	64	200
3.2 Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice	67	201
3.3 Probabilitatea realizării unor evenimente	70	202
3.4 Teste grilă de autoevaluare	72	203
Testul 1	72	203
4. Patrulatere	73	203
4.1 Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex	73	203
4.2 Paralelogram: proprietăți. Linie mijlocie în triunghi. Proprietăți. Centrul de greutate al unui triunghi	77	204
4.3 Paralelograme particulare: dreptunghi, romb și pătrat. Proprietăți	84	206
4.3.1 Dreptunghi	84	206
4.3.2 Romb	88	207
4.3.3 Pătratul	91	208
4.4 Trapez, clasificare, proprietăți. Linie mij-		

locie în trapez. Trapezul isoscel, proprietăți.	94	210
4.5 Perimetre și arii: paralelogram, paralelograme particulare, triunghi, trapez	100	213
4.6 Teste grilă de autoevaluare	110	216
Testul 1	110	216
Testul 2	111	216
Testul 3	112	218
Testul 4	113	218
Testul 5	114	219
5. Cercul	115	220
5.1 Cercul: definiție, elemente. Unghi la centru. Măsura arcelor. Coarde și arce în cerc. Proprietăți	115	220
5.2 Unghi inscris în cerc. Triunghi inscris în cerc. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc. Tangenta dintr-un punct exterior la un cerc.		
Triunghi circumscris. Patrulater circumscris.	121	222
5.3 Poligoane regulate inscrise într-un cerc (construcție, măsuri de unghiuri). Calculul elementelor (latură, apotemă, arie, perimetru) în triunghi echilateral, pătrat, hexagon regulat ..	127	225
5.4 Lungimea cercului și aria discului	132	227
5.5 Teste grilă de autoevaluare	135	228
Testul 1	135	228
Testul 2	136	229
6. Asemănarea triunghiurilor	230	
6.1 Raportul a două segmente. Segmente proporționale. Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere (segmente) date	137	230
6.2 Teorema paralelelor echidistante. Teorema lui Thales	140	232
6.3 Reciproca teoremei lui Thales	144	233
6.4 Triunghiuri asemenea. Criterii de asemănare a triunghiurilor. Teorema fundamentală a asemănării. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea	146	234
6.5 Teste grilă de autoevaluare	151	236
Testul 1	151	236
Testul 2	152	238
Testul 3	153	239

7. Relații metrice în triunghiul dreptunghic	154	241
7.1 Proiecții ortogonale pe o dreaptă. Teorema înălțimii. Teorema catetei	154	241
7.2 Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora	160	244
7.3 Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic: sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi ascuțit. Rezolvarea triunghiului dreptunghic	165	248
7.4 Teste grilă de autoevaluare	169	250
Testul 1	169	250
Testul 2	170	251
8. Teste grilă de autoevaluare finale	171	252
Testul 1	171	252
Testul 2	172	253
Testul 3	173	254
Testul 4	174	256
Testul 5	175	257
Testul 6	176	257
Testul 7	177	258

**Tiparul executat la
EDITURA HYPERION SRL
CRAIOVA**

1. Mulțimea numerelor reale

1.1 Rădăcina pătrată a unui număr rațional

1.1.1 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Numim rădăcină pătrată a unui număr natural pătrat perfect a , numărul natural x care verifică relația $x^2 = a$.

Numărul natural x se numește radicalul numărului natural a și se notează \sqrt{a} .

Exemplu. $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$; $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$

b) Probleme rezolvate

1. Arătați că numările 225 și 10^6 sunt pătrate perfecte.

Soluție. Se descompune în factori primi numărul 225:
 $225 = 3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 15^2$ și $10^6 = (10^3)^2 = 1\,000^2$.

2. Calculați: $\sqrt{25}, \sqrt{400}, \sqrt{74}$.

Soluție. $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$; $\sqrt{400} = \sqrt{2^4 \cdot 5^2} = \sqrt{(2^2 \cdot 5)^2} = \sqrt{20^2} = 20$; $\sqrt{74} = \sqrt{(7^2)^2} = \sqrt{49^2} = 49$.

3. Calculați: $\sqrt{25} + \sqrt{81} + \sqrt{4}$.

Soluție. $\sqrt{25} + \sqrt{81} + \sqrt{4} = \sqrt{5^2} + \sqrt{9^2} + \sqrt{2^2} = 5 + 9 + 2 = 16$.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Numărul 900 este pătratul numărului:

20 25 30 35 40

2. Numărul 1 225 este pătratul numărului:

20 25 30 35 40

3. Dintre numerele: 12, 25, 32, 41, 81, 55, 75, 36, 66, 99 pătrate perfecte sunt:

două trei patru cinci șase

4. Rădăcina pătrată a numărului 196 este:

11 12 13 14 15

5. Rădăcina pătrată a numărului 625 este:

21 22 23 24 25

6. Rădăcina pătrată a numărului 3^6 este:

9 18 27 36 45

7. Rădăcina pătrată a numărului $(-2)^8$ este:

12 14 16 18 20

8. Rădăcina pătrată a numărului 2^{10} este:

8 16 27 32 64

9. Valoarea numărului $\sqrt{5^4}$ este:

15 20 25 30 35

10. Valoarea numărului $\sqrt{2^4} + \sqrt{(-2)^4}$ este:

0 2 4 6 8

11. Valoarea numărului $\sqrt{4} + \sqrt{9}$ este:

3 4 5 6 7

12. Valoarea numărului $\sqrt{16} + \sqrt{\sqrt{(-3)^8}}$ este:

10 11 12 13 14

13. Valoarea numărului $\sqrt{81} + \sqrt{\sqrt{(-5)^8}}$ este:

30 31 32 33 34

14. Valoarea numărului $\sqrt{100} - \sqrt{25}$ este:

3 4 5 6 7

15. Valoarea numărului $\sqrt{64} + \sqrt{36}$ este:

9 10 11 12 14

1.1.2 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional

a) Noțiuni teoretice și exemple

1. Un număr rațional pozitiv a se numește pătrat perfect dacă există un număr rațional x , astfel încât $a = x^2$.

Exemplu. $\frac{4}{9}$ este rațional pătrat perfect, deoarece $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$; $0,36 = \frac{36}{100}$ este rațional pătrat perfect, deoarece $\frac{36}{100} = \left(\frac{6}{10}\right)^2$.

2. Numim **rădăcină pătrată** a unui număr rațional pozitiv pătrat perfect a , numărul rațional pozitiv x care verifică relația $x^2 = a$. Numărul rațional pozitiv x se numește radicalul numărului rațional pozitiv a și se notează \sqrt{a} .

Exemplu. $\sqrt{\frac{25}{4}} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$; $\sqrt{\frac{16}{9}} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}$; $\sqrt{0,49} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \sqrt{\left(\frac{7}{10}\right)^2} = \frac{7}{10} = 0,7$.

b) Probleme rezolvate

1. Calculați: $\sqrt{0,25}$.

Soluție. $\sqrt{0,25} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \sqrt{\left(\frac{5}{10}\right)^2} = \frac{5}{10} = 0,5$.

2. Calculați: $\sqrt{0,81} + \sqrt{\frac{1}{100}}$.

Soluție. $\sqrt{0,81} + \sqrt{\frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{81}{100}} + \sqrt{\frac{1}{100}} = \sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{9}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Numărul rațional 0,01 este pătratul numărului:

0,01 0,02 0,1 0,2 0,3

2. Numărul rațional 1,44 este pătratul numărului:

1,1 1,2 1,3 1,4 1,5

două trei patru cinci şase

4. Rădăcina pătrată a numărului $\frac{49}{625}$ este:

$$\frac{7}{15} \quad \frac{9}{25} \quad \frac{7}{25} \quad \frac{7}{20} \quad \frac{8}{25}$$

5. Rădăcina pătrată a numărului $\frac{400}{729}$ este:

$$\frac{17}{27} \quad \frac{19}{29} \quad \frac{18}{27} \quad \frac{20}{27} \quad \frac{21}{25}$$

6. Rădăcina pătrată a numărul 6,25 este:

$$1,5 \quad 2 \quad 2,5 \quad 3 \quad 3,5$$

7. Rădăcina pătrată a numărul 10,24 este:

$$2,9 \quad 3,1 \quad 3,2 \quad 3,3 \quad 3,4$$

8. Valoarea numărului $\sqrt{0,81} + \sqrt{1,21}$ este:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

9. Valoarea numărului $\sqrt{1,44} - \sqrt{0,04}$ este:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

10. Valoarea numărului $\sqrt{1,21} + \sqrt{1,44} + \sqrt{1,69} + \sqrt{1,96}$ este: 1 2 3 4 5

11. Valoarea numărului $\sqrt{0,01} + \frac{2}{5}$ este:

$$0,3 \quad 0,4 \quad 0,5 \quad 0,6 \quad 0,7$$

12. Valoarea numărului $\sqrt{10,89} - \frac{23}{10}$ este:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 0,8 \quad 0,9$$

13. Valoarea numărului $\sqrt{1,44} + \frac{3}{2}$ este:

$$2,3 \quad 2,4 \quad 2,5 \quad 2,6 \quad 2,7$$

1.1.3 Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr natural; aproximări

a) Noțiuni teoretice și exemple

Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr natural rezultă din exemplele de mai jos:

1. Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr natural pătrat perfect: $\sqrt{289} = 17$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{289} \mid 17 \\ \underline{-1} \qquad \qquad \qquad 27 \cdot 7 = 189 \\ \hline 189 \\ \underline{-189} \qquad \qquad \qquad \\ \hline 0 \end{array}$$

2. Extragerea rădăcinii pătrate cu o zecimală exactă dintr-un număr natural: $\sqrt{5} = 2,2$

$$\begin{array}{r} \sqrt{5,00} \mid 2,2 \\ \underline{-4} \qquad \qquad \qquad 42 \cdot 2 = 84 \\ \hline 100 \\ \underline{-84} \qquad \qquad \qquad \\ \hline 16 \end{array}$$

3. Extragerea rădăcinii pătrate cu două zecimale exacte dintr-un număr natural: $\sqrt{239} = 15,45$

$$\begin{array}{r} \sqrt{239,0000} \mid 15,45 \\ \underline{-25} \qquad \qquad \qquad 25 \cdot 5 = 125 \\ \hline 139 \\ \underline{-125} \qquad \qquad \qquad 304 \cdot 4 = 1216 \\ \hline 1400 \\ \underline{-1216} \qquad \qquad \qquad 3085 \cdot 5 = 15425 \\ \hline 18400 \\ \underline{-15425} \qquad \qquad \qquad \\ \hline 2975 \end{array}$$

4. Dacă se cere aproximarea (prin lipsă sau prin adăos) de o

zecime sau o sutime a radicalului dintr-un număr, atunci se calculează radicalul cu 2 sau 3 zecimale exacte și apoi se face aproximarea respectivă.

b) Probleme rezolvate

1. Calculați $\sqrt{3\ 575}$ cu o zecimală și cu două zecimale exacte.

Soluție. $\sqrt{3\ 575} = 59,7913 \dots$. Aproximația cu o zecimală exactă este de 59,7 și aproximația cu două zecimale exacte este de 59,79.

2. Calculați $\sqrt{25\ 468}$ cu o aproximație de o zecime prin lipsă și prin adăos și cu o aproximație de o sutime prin lipsă și prin adăos.

Soluție. $\sqrt{25\ 468} = 159,5869 \dots$. Aproximația de o zecime prin lipsă este 159,5 și prin adăos este 159,6. Aproximația de o sutime prin lipsă este 159,58 și prin adăos este 159,59.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate calculați $\sqrt{12\ 321}$ și obțineți:

109 110 111 112 113

2. Folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate calculați $\sqrt{15\ 625}$ și obțineți:

115 120 125 130 135

3. Valoarea cu o zecimală exactă a numărului $\sqrt{1\ 599}$ este:

38,5 38,9 39,3 39,9 40,5

4. Valoarea cu o zecimală exactă a numărului $\sqrt{9\ 999}$ este:

99,6 99,7 99,8 99,9 100

5. Valoarea cu o zecimală exactă a numărului $\sqrt{4\ 567}$ este:

69,6 67,5 68,8 59,7 67,6

6. Valoarea cu două zecimale exacte a numărului $\sqrt{11\ 356}$ este: 106,46 106,53 106,56 105,72 107,36

7. Valoarea cu două zecimale exacte a numărului $\sqrt{9\ 468}$ este: 97,41 97,30 97,52 97,23 97,36

8. Aproximația de o zecime prin lipsă a numărului $\sqrt{189}$ este: 12,6 14,7 13,6 13,8 13,7

9. Aproximația de o zecime prin adăos a numărului $\sqrt{4275}$ este: 65,3 65,4 65,5 66,3 66,7

10. Aproximația de o sutime prin lipsă a numărului $\sqrt{12\ 349}$ este:

111,11 111,12 111,13 111,18 113,72

11. Aproximația de o sutime prin adăos a numărului $\sqrt{799}$ este: 27,6 27,7 28,26 28,27 28,28

12. Valoarea cu o zecimală exactă a numărului $\sqrt{8 + \sqrt{11}}$ este: 5,9 6,1 6,2 6,3 6,4

13. Valoarea cu două zecimale exacte a numărului $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$ este: 3,94 3,95 3,96 3,97 3,98

14. Aproximația de o zecime prin adăos a numărului $\sqrt{5 + \sqrt{7}}$ este: 4,5 4,6 4,7 4,8 4,9

15. Aproximația de o zecime prin lipsă a numărului $\sqrt{2 + \sqrt{12}}$ este: 4,5 4,6 4,7 4,8 4,9

16. Aproximația de o sutime prin adăos a numărului $\sqrt{3 + \sqrt{15}}$ este: 5,59 5,60 5,61 5,62 5,63

17. Aproximația de o sutime prin lipsă a numărului $\sqrt{5 + \sqrt{20}}$ este: 6,67 6,68 6,69 6,70 6,71

a) Noțiuni teoretice și exemple

Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional rezultă din exemplele de mai jos:

1. Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pătrat perfect: $\sqrt{6,25} = 2,5$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{6,25} \mid 2,5 \\ \underline{-4} \quad \quad \quad 45 \cdot 5 = 225 \\ \underline{225} \\ \underline{225} \\ \underline{\underline{0}} \end{array}$$

2. Extragerea rădăcinii pătrate cu o zecimală exactă dintr-un număr rațional: $\sqrt{7,45} = 2,7$

$$\begin{array}{r} \sqrt{7,45} \mid 2,7 \\ \underline{-4} \quad \quad \quad 47 \cdot 7 = 329 \\ \underline{345} \\ \underline{329} \\ \underline{\underline{16}} \end{array}$$

3. Extragerea rădăcinii pătrate cu două zecimale exacte dintr-un număr rațional: $\sqrt{459,25} = 21,43$

$$\begin{array}{r} \sqrt{459,25} \mid 21,43 \\ \underline{-4} \quad \quad \quad 41 \cdot 1 = 41 \\ \underline{=59} \quad \quad \quad 424 \cdot 4 = 1696 \\ \underline{41} \quad \quad \quad 4283 \cdot 3 = 12849 \\ \underline{1825} \\ \underline{1696} \\ \underline{=12900} \\ \underline{12849} \\ \underline{\underline{\underline{51}}} \end{array}$$

4. Dacă se cere aproximarea (prin lipsă sau prin adăos) de o

zecime sau o sutime a radicalului dintr-un număr rațional, se calculează radicalul cu 2 sau 3 zecimale exacte și apoi se face aproximarea respectivă.

b) Probleme rezolvate

1. Calculați $\sqrt{125,75}$ cu o zecimală și cu două zecimale exacte.

Soluție. $\sqrt{125,75} = 11,2138 \dots$. Aproximația cu o zecimală exactă este de 11,2 și aproximarea cu două zecimale exacte este de 11,21.

2. Calculați $-\sqrt{25,36}$ cu o aproximare de o zecime prin lipsă și prin adăos și cu o aproximare de o sutime prin lipsă și prin adăos.

Soluție. $-\sqrt{25,36} = -5,0358 \dots$. Aproximația de o zecime prin lipsă este -5,1 și prin adăos este -5,0. Aproximație de o sutime prin lipsă este -5,04 și prin adăos este -5,03.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate calculați $\sqrt{123,21}$ și obțineți:

10,9 11,0 11,1 11,2 11,3

2. Folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate calculați $\sqrt{156,25}$ și obțineți:

11,5 12,0 12,5 13,0 13,5

3. Valoarea cu o zecimală exactă a numărului $\sqrt{15,99}$ este:

3,6 3,7 3,8 3,9 4,1

4. Valoarea cu o zecimală exactă a numărului $\sqrt{99,99}$ este:

9,5 9,6 9,7 9,8 9,9

5. Valoarea cu o zecimală exactă a numărului $-\sqrt{7,4}$ este: